

السؤال الأول : (20 علامة)

- (أ) إذا كانت  $A = Q \cap [1, \sqrt{3}]$  مجموعة جزئية من  $(Q, \leq)$  فهل هناك حد أعلى وحد أعلى أصغري في  $Q$  ؟ (انكرهما إن وجدا).
- (ب) إذا كانت  $E = \{2, 5, 6, 25\}$  مرتبة بعلامة يقسم ، فهل هناك عناصر اعظمية و عصر أكبر ؟ (انكرهما إن وجدا).
- (ت) إذا كان  $f: E \rightarrow F$  ايرومورفيزم ترتيب وإذا كانت  $A \subseteq E$  هناك حد أعلى أصغري  $S$  في  $E$  ، فثبت أن  $f(A)$  هناك عندئذ حد أعلى أصغري في  $F$  هو  $f(S)$  أي أن

$$f(\sup_E A) = \sup_F (f(A))$$

السؤال الثاني : (17 علامة)

ليكن  $f$  تطبيق من نصف الشبكة العليا  $E$  في نصف الشبكة العليا  $F$  ، فثبت أن الشرط اللازم والكافي كي يكون  $f$  -ايرومورفيزم هو أن يكون  $f$  ايرومورفيزم ترتيب.

السؤال الثالث : (18 علامة)

- (أ) يعرف أن  $E = \{a, b, c\}$  على  $(P(E), \subseteq)$  تشكل شبكة ، على جميع فوق المرشحات فيها .
- (ب) نقول عن المرشحة  $P$  في الشبكة  $E$  لها أولية إذا كان  $x \vee y \in P$  على  $x \in P$  أو  $y \in P$  ، فثبت أنه في الشبكة التوزيعية كل فوق مرشحة تكون مرشحة أولية .

السؤال الرابع : (20 علامة)

- (أ) لنكن  $E$  مجموعة غير حالية و  $f$  تطبيق من الشبكة  $(P(E), \subseteq)$  في الشبكة  $(P(E), \subseteq)$  معرف بالشكل التالي :  $\forall x \in P(E)$  فإن  $f(x) = x \cup X_0$  حيث  $X_0$  مجموعة جزئية غير حالية ثابتة من  $E$  ، فهل  $f$  مورفيزم بوليني ولماذا ؟
- (ب) لنكن  $A$  حلقة بوليدانية و  $I$  مثالية فيها ، فثبت أن  $I$  هي مرشحة في  $A$

سؤال الخامس : (25 علامة)

ن  $A$  جبر بوليني و  $a$  و  $b$  عنصرين ثابتين في  $A$  وإذا كان  $b \leq a$  ، فثبت أن حلول المعادلة السابقة  $b=0$  على بالشكل  $b \leq x \leq a + b + 1$  ، ثم حل المعادلة  $35x + 7 = 0$  في الشبكة (أ) ، (D(210)).

سليم صحيح مقدر نظرية الشبكات  
لطلاب السنة رابعة رياضيات - جبر  
الفصل الأول للعام الدراسي ٢٠١٧/٢٠١٨

السؤال الأول: 20

(P) تملك A عددان عليا مثل 3 و 4 (2) ولكن لا تملك هرا على A أصغر.  
(C) 6، 25 هما عددان أعطيان في E ولكن E لا تملك عنصر أكبر (2)  
(ح) - لكن  $x' \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A$  بحيث يكون  $x' = f(x)$  ولكن  $x \leq s \Leftrightarrow x' = f(x) \leq f(s)$   
لكن  $m' = f(m) \leq f(s)$  هرا على المجموعة  $f(A)$  في F (6)  
فما إذا  $x \in A$  فإن  $x \leq m \Leftrightarrow f(x) \leq m' = f(m)$  هرا على المجموعة A  
 $s \leq m \Leftrightarrow f(s) \leq f(m) = m'$  أي أن  $f(s)$  هي هرا على A أصغر (6)  
للمجموعة  $f(A)$  في F.

السؤال الثاني: 17

- بفرضي أن  $f: V \rightarrow W$  إندومورفيزم من E على E' هرا يعني أن f تقابل  
وقتاير لكي أن  $f$  قتاير وذلك لأن:

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(x) \vee f(y) = f(y) \Rightarrow f(x \vee y) = f(y) \Rightarrow x \vee y = y \Rightarrow x \leq y \quad (9)$$

- العكس: بفرضي أن f إندومورفيزم ترتيب  $\leq$  f يحافظ على الحدود العليا  
الأصغرية ومنه

$$f(\sup_E \{x, y\}) = \sup_{E'} f(\{x, y\}) = \sup_{E'} \{f(x), f(y)\}$$

$$f(x \vee y) = f(x) \vee f(y) \quad (18)$$

السؤال الثالث: 18

(P) الشبكة  $\mathcal{P}(E)$  تملك ثلاثة فروع مرشحات هي:

$$(3) F_1 = \{\{a\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$(3) F_2 = \{\{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$

$$(3) F_3 = \{\{c\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}$$



(ب) بفرض أن  $E$  شبكة توزيعية وأن  $F$  مجموعة مرتبة فيها، وليكن  
 $x, y \in F$  ونفرض جبراً أن  $F$  ليست أولية أي أن  $x \notin F$  و  $y \notin F$   
 فبفرضه إذا كان  $x \notin F$  يوجد  $x_1 \in F$  بحيث يكون  $x \wedge x_1 = 0$   
 $\Rightarrow (x_1 \wedge (x \vee y)) = (x_1 \wedge x) \vee (x_1 \wedge y) = 0 \vee (x_1 \wedge y) = x_1 \wedge y \in F$  (5)

وعزاً تناقضاً لأن  $x_1 \wedge y \leq y$  و  $y \notin F$   $\Rightarrow x_1 \wedge y \notin F$  و  $x_1 \wedge y \in F$  بالتالي فإن  
 فالفرض الجبري خاطئ أي أنه يجب أن يكون  $x \in F$  و  $y \in F$  وبالتالي فإن  
 $F$  أولية. (4)

السؤال الرابع: 20  
 $f: \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$  و  $x, y \in \mathcal{P}(E)$

$$f(x \cup y) = x \cup y \cup x_0 = (x \cup x_0) \cup (y \cup x_0) = f(x) \cup f(y)$$

$$f(x \cap y) = (x \cap y) \cup x_0 = (x \cup x_0) \cap (y \cup x_0) = f(x) \cap f(y)$$

$$f(E) = E \cup x_0 = E \quad (5)$$

$$f(\emptyset) = \emptyset \cup x_0 = x_0$$

$$f(x) = x \cup x_0$$

$$\{ f(x) = x \cup x_0 = x \cap x_0 \} \Rightarrow f(x) \neq f(f(x)) \quad (5)$$

وبالتالي فإن  $f$  مورفزم شبكة ولكنه ليس مورفزم بولياني.

(ج) يمكن  $I$  متالبة في  $A$  وليكن  $x \in I'$  و  $y \geq x$   $\Leftrightarrow x \in I$  و  $x' \in I$  و  $y' \leq x'$  و  $I$  متالبة

$$(5) y \in I' \Leftrightarrow y' \in I \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x' \vee y' \in I \Leftrightarrow y' \in I \text{ و } x' \in I \Leftrightarrow y \in I' \text{ و } x \in I'$$

$$(5) x \wedge y \in I' \Leftrightarrow (x \wedge y)' \in I$$



سؤال الخامس: 25  
 بيان المعادلة  $ax+b=0$  يكتب بالشكل  $ax=b$  فإن  
 أي أن  $x \geq b$  (5)  
 كما أن

$$x \geq ax = b$$

$$(a+b+1)x = ax + bx + x = ax + b + x = 0 + x = x \quad (5) \text{ ومنه}$$

$$b \leq x \leq a+b+1 \quad \text{ومنه نستنتج} \quad x \leq a+b+1$$

$$D(210) = \{1, 2, 3, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105, 210\}$$

أن حلول المعادلة  $35x+7=0$  بالعددية: (5)

$$7 \leq x \leq 35+7+210 \Rightarrow 7 \leq x \leq 35+30 \Rightarrow$$

$$7 \leq x \leq (35 \cdot 30') \vee (35' \cdot 30) \Rightarrow 7 \leq x \leq (35 \cdot 7) \vee (6 \cdot 30) \Rightarrow$$

$$7 \leq x \leq 7 \vee 6 \Rightarrow 7 \leq x \leq 42$$

$$x \in \{7, 14, 42\} \quad (5)$$

د. ع. م. د. م.

~~8~~